14/10/2020

Πόρισμα: Για $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $\mathbb{N}^{\kappa} = \underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{\kappa\text{-φορές}}$

είναι αριθμήσιμο. Γενικότερα, ένα πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο (το πολύ) αριθμήσιμων συνόλων είναι (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση 4: Έστω $A_1, A_2, \dots$ μια (αριθμήσιμη) οικογένεια το πολύ αριθμήσιμων συνόλων. Τότε, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ αριθμήσιμο σύνολο.

με A_1 άπειρο.

Απόδειξη: Ειδική περίπτωση:

Τα $A_1, A_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο (δηλ. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$)

- Για $i \in \mathbb{N}$, A_i το πολύ αριθμήσιμο $\Rightarrow$ $\exists f_i : A_i \to \mathbb{N}$, f_i 1-1.

Θεωρούμε την απεικόνιση:
$F : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με τύπο

$F(a) = (n_a, f_{n_a}(a))$, όπου το n_a ορίζεται ως εξής: Επειδή τα $A_1, A_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο, για $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\exists!\, n_a \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$a \in A_{n_a}$.

- Η F είναι 1-1, γιατί αν $F(a) = F(\beta)$
$\Rightarrow (n_a, f_{n_a}(a)) = (n_\beta, f_{n_\beta}(\beta))$

$\Rightarrow n_a = n_\beta \Rightarrow f_{n_a}(a) = f_{n_\beta}(\beta) \xRightarrow{f_{n_a}\ 1-1}$
$a = \beta$

• Πρόταση 3 : $\exists\ G : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 1-1

$\Rightarrow$ Η απεικόνιση $G\circ F : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}$ είναι

1-1 $\xRightarrow{\text{Προτ. 2}}$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ το πολύ αριθμήσιμο σύνολο

$\xRightarrow{A_1 \text{ άπειρο}}$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ αριθμήσιμο σύνολο.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A_1$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ άπειρο

<u>Γενική περίπτωση</u> : Θέτουμε $B_1 := A_1$,

$B_2 := A_2 \setminus A_2$, $B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, . . . ,
$B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$
Τότε, $B_1, B_2, \dots$ ξένα ανά δύο και το πολύ αριθμήσιμα σύνολα.

$\xRightarrow{\text{Ειδική περίπτωση}}$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ αριθμήσιμο σύνολο,

επειδή $B_1 = A_1$ άπειρο.
• Όμως , $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ $\boxtimes$

<u>Πρόταση 5</u> : Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο
<u>Αποδ.</u>: Θέτουμε $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$,

$\mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$.

• Επειδή $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$, από την Πρόταση 4 (κ' επειδή προφανώς $\mathbb{Q}_+ \cong \mathbb{Q}_-$) , αν δείξουμε ότι $\mathbb{Q}_+ \cong \mathbb{N}$, τότε $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$.

• Έστω $q \in \mathbb{Q}_+$. Τότε $\exists!$ $m_q, n_q \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\text{ΜΚΔ}(m_q, n_q) = 1$ κ' $q = \dfrac{m_q}{n_q}$.

Ορίζουμε $f: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, με τύπο $f(q) = (m_q, n_q)$ και είναι 1-1.

Η f είναι 1-1 $\xRightarrow{\text{Προτ. 2}}$ $\mathbb{Q}_+$ το πολύ αριθμήσιμο $\xRightarrow{\mathbb{Q}_+ \text{ άπειρο}}$ $\mathbb{Q}_+$ αριθμήσιμο. ◪

Κάθε αριθμός $x \in (0,1)$ έχει ένα δεκαδικό ανάπτυγμα της μορφής $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$, όπου $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Δηλαδή, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$, όπου τα a_i δεν είναι όλα 0 ή όλα 9.

Λήμμα: Έστω $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$

$y = 0,b_1b_2b_3\ldots$, $x, y \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

Αν $x = y$, τότε $\{a_n\} = \{\beta_n\}$.

Π.χ. $0,199999\ldots = 0,20000\ldots$ (όμως $0,2 \in \mathbb{Q}$)
(ασκ)

Απόδειξη Λήμματος: Έστω ότι $\{a_n\} \neq \{\beta_n\}$. Θέτουμε $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$

Έστω π.χ. ότι $a_{n_0} > b_{n_0}$. Τότε,

$x - y = 0,(a_1 - \beta_1)(a_2 - \beta_2)\ldots(a_{n_0-1} - \beta_{n_0-1})(a_{n_0} - \beta_{n_0})$

$= 0,0\ldots0(a_{n_0}-\beta_{n_0})(a_{n_0+1}-\beta_{n_0+1})\ldots$

$= (a_{n_0}-\beta_{n_0})\cdot 10^{-n_0} + (a_{n_0+1}-\beta_{n_0+1})10^{-n_0+1} + \ldots$

$= (a_{n_0}-b_{n_0})\cdot 10^{-n_0} + 10^{-n_0-1}\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n_0+1+n}-b_{n_0+1+n})\cdot 10^{-n}$

Παρατήρηση : $a_k - b_k \geq 9$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow x-y \geq (a_{n_0}-b_{n_0})\cdot 10^{-n_0}$

$+ 10^{-n_0-1}\cdot(-9)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$

(με ισότητα αν-ν $a_k-\beta_k=-9$, $\forall k \geq n_0+1$
$\iff a_k=0$, $b_k=9$, $\forall k \geq n_0+1$)

$\xRightarrow[a_{n_0}-\beta_{n_0}\geq 1]{a_{n_0}-\beta_{n_0}>0} x-y \geq 10^{-n_0} - 9\cdot 10^{-n_0-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}10^{-n}$

[Γεωμετρική σειρά : Για $-1<r<1$, ισχύει

$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$]

$= 10^{-n_0} - 9\cdot 10^{-n_0-1}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$

$= 10^{-n_0} - 9\cdot 10^{-n_0-1}\cdot\frac{10}{9} = 0$

Δηλ. $x-y\geq 0$, με ισότητα αν-ν
$a_k=0$ ς' $b_k=9$, $\forall k \geq n_0+1$.
Όμως, αν $a_k=0$, $\forall k\geq n_0+1$, τότε
$x=0,a_1a_2\ldots a_{n_0}000\ldots \in \mathbb{Q}$, άτοπο
$\Longrightarrow x-y>0$, άτοπο $\Longrightarrow$
$\{a_n\}=\{\beta_n\}$. $\boxtimes$

Θεώρημα: Το σύνολο $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε όλα τα στοιχεία του $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$x_1 = 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots$$
$$x_2 = 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0, a_1^n a_2^n a_3^n \dots$$
$$\vdots$$

όπου $a_i^j \in \{0,1,\dots 9\}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$ τ.ω. a_n^m δεν είναι όλοι 0 ή όλοι 9 για κανένα $m \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε την ακολουθία $\{b_n\}$, τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \{0,1,\dots,9\}$, $b_n \neq a_n^n$, $b_n \neq 0,9$.

$$\{b_n\} \neq \{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\{b_n\} \neq \{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\vdots$$
$$\{b_n\} \neq \{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\vdots$$

Λήμμα $\Rightarrow$ Ο αριθμός $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, άτοπο. ∎

Πόρισμα: Τα σύνολα $[a,b]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, ... είναι υπεραριθμήσιμα.

Απόδειξη (άσκηση).

Supremum κ' infimum

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Το A ονομάζεται άνω (ή κάτω) φραγμένο αν $\exists M \in \mathbb{R}$ (αντίστοιχα αν $\exists m \in \mathbb{R}$) τ.ω. $\forall x \in A$, $x \leq M$ (ή $\forall x \in A$, $x \geq m$)

Τα m, M ονομάζονται κάτω και άνω φράγματα του A αντίστοιχα.

Αν το A είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, τότε ονομάζεται φραγμένο.

<u>Ορισμός</u>: Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε $\sup A$ ορίζεται ως το μικρότερο άνω φράγμα του A. Δηλ. αν M είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα του A, τότε

$$\sup A \leq M$$

Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup A = +\infty$

Αν το A είναι κάτω φραγμένο τότε $\inf A$ ορίζεται ως το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A. Δηλ. αν m είναι κάποιο κάτω φράγμα του A, τότε $\inf A \geq m$.

Αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο ορίζουμε $\inf A = -\infty$.

- Γενικά, $\inf A \leq \sup A$ $(A \neq \emptyset)$

<u>Αξίωμα της πληρότητας</u>: Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας έχει infimum.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο.

Θέτουμε $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.
Τότε, $-A$ άνω φραγμένο $\Rightarrow$ Υπάρχει το
$M := \sup(-A) \in \mathbb{R} \Rightarrow M$ άνω φράγμα του $-A$.
Επίσης, αν N κάποιο άνω φράγμα του $-A$,
τότε $M \leq N$.

· Όμως, $-M$ κάτω φράγμα του A &
αν m κάποιο κάτω φράγμα του A, τότε
$-m$ άνω φράγμα του $-A$. $\Rightarrow -m \geq \sup(-A) = M$

$\Rightarrow m \leq -M \Rightarrow -M = \inf A$. ☒

<u>Παρατήρηση</u> (προκύπτει από την προηγούμενη <u>απόδειξη</u>): $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

i) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε
$M = \sup A$, $M \in \mathbb{R}$, αν-ν:

α) M άνω φράγμα του A

β) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x = x_\varepsilon \in A$, τ.ω. $x > M - \varepsilon$.

ii) Αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε
$m = \inf A$, $m \in \mathbb{R}$, αν-ν:

α) m κάτω φράγμα του A

β) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x = x_\varepsilon \in A$, τ.ω. $x < m + \varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>: i)($\Rightarrow$) $M = \sup A \Rightarrow$

α) M άνω φράγμα του A

β) Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω ότι $\nexists x \in A$, τ.ω
$x > M - \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A$, $x \leq M - \varepsilon \Rightarrow$
$M - \varepsilon$ άνω φράγμα του A, άτοπο, γιατί
M το μικρότερο άνω φράγμα του A ($\sup A$)

($\Leftarrow$) Ισχύουν: α) $M \geq x$, $\forall x \in A$

β) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, τ.ω
$x > M - \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$ και N κάποιο άνω φράγμα του A. Τότε, $N \geq x_\varepsilon > M - \varepsilon \Longrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $N > M - \varepsilon \Longrightarrow N \geq M$
$\Longrightarrow$ $\forall$ άνω φράγμα N του A, ισχύει $M \leq N$
$\Longrightarrow M = \sup A$.

ii) Ομοίως με το (i) ή βάλτε όπου A το $-A$ και χρησιμοποίησε το (i). $\blacksquare$